DURÉE : 4 heures

$\mathbb{N}$: entiers naturels, zéro inclus.

$\mathbb{R}$: corps des nombres réels.

On note $\mathcal{F}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $[-1, +1]$ à valeurs réelles et $\mathcal{P}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) le $\mathbb{R}$-sous espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On munit $\mathcal{F}$ de la norme notée $\| \ \|$:

$$\forall f \in \mathcal{F} \qquad \|f\| = \text{Sup}_{x \in [-1, +1]} |f(x)| \qquad \text{(Sup : borne supérieure).}$$

Définition 1.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $f \in \mathcal{F}$. *Une alternance d'ordre k de f* est une suite strictement croissante de k points telle que :

$$-1 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \quad \ldots \quad < x_k \leqslant 1$$
$$f(x_j) = -f(x_{j+1}) \qquad j = 1, 2 \quad \ldots \quad k-1$$
$$\|f\| = |f(x_j)| \qquad j = 1, 2 \quad \ldots \quad k$$

Définition 2.

Étant donnés $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$, on dit que le polynôme $p_n \in \mathcal{P}_n$ est *une meilleure approximation de degré n* de la fonction f s'il vérifie la condition :

$$\|f - p_n\| = \text{Inf}_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\| \qquad \text{(Inf. : borne inférieure).}$$

I

Dans cette partie on fixe une fonction $f \in \mathcal{F}$ et on note m son minimum et M son maximum.

1° Montrer que l'unique polynôme de meilleure approximation de degré 0 de f est la constante $\dfrac{M + m}{2}$.

Tournez la page S. V. P.

2° Montrer que la fonction f admet une alternance d'ordre 2 si et seulement si $m = -M$.

3° Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que :

a. Si la fonction f admet une alternance d'ordre $n+2$, alors pour tout polynôme $q \in \mathcal{P}_n$ on a l'inégalité :

$$\|f - q\| \geqslant \|f\|$$

b. Si la fonction $f - p_n$ (où $p_n \in \mathcal{P}_n$) admet une alternance d'ordre $n+2$, alors le polynôme p_n est une meilleure approximation de degré n de f.

II

On désigne par $\mathcal{R}z$ la partie réelle du nombre complexe z.

i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, +1]$ on pose $\theta = \text{Arc cos } x$, $\theta \in [0, \pi]$, et, $T_n(x) = \mathcal{R}\, e^{in\theta}$.

1° *a.* Montrer que T_n est un polynôme de degré n de la variable x.

b. Quel est le coefficient de x^n?

c. Calculer $\|T_n\|$.

d. Tracer le graphe des fonctions T_0, T_1, $\dfrac{T_2}{2}$, $\dfrac{T_3}{4}$.

2° *a.* Établir que le polynôme T_n admet une alternance d'ordre $n+1$.

b. Déduire de *a.* que tout polynôme unitaire $q \in \mathcal{P}_n$ (c.-à-d. dont le coefficient de x^n est égal à 1) vérifie l'inégalité :

$$\|q\| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{(on suppose } n \geqslant 1\text{).}$$

ENS ST-CLOUD FONTENAY (P') 82

3° Soit c un nombre réel tel que $|c| < 1$.

a. Montrer qu'il existe une fonction continue ψ, à valeurs réelles, définie sur $[0, \pi]$, avec $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$, telle que :

$$\forall \theta \in [0, \pi] \qquad e^{i\psi(\theta)} = \frac{1 - ce^{-i\theta}}{1 - ce^{i\theta}}.$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $\varphi_n \in \mathcal{F}$:

$$\varphi_n(x) = \mathcal{R}\left(e^{i(n+1)\theta}\,\frac{1 - ce^{-i\theta}}{1 - ce^{i\theta}}\right) \qquad \text{avec} \qquad \theta = \operatorname{Arc}\cos x$$

Calculer $\|\varphi_n\|$.

Montrer que φ_n admet une alternance d'ordre $n + 2$ (utiliser II. 3° *a.*).

4° *a.* Pour $x \in [-1, +1]$, montrer que la série :

$$-\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} c^k \mathrm{T}_k(x)$$ converge vers une fonction $f_c(x)$ que l'on explicitera.

b. On considère le polynôme $p_n \in \mathcal{P}_n$

$$p_n(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} c^k \mathrm{T}_k(x) + \frac{c^n}{1 - c^2}\mathrm{T}_n(x).$$

Montrer que p_n est un polynôme de meilleure approximation de degré n de la fonction f_c.

Calculer $\|f_c - p_n\|$.

5° *a.* Montrer que l'on peut choisir c et λ tels que :

$$\forall \mathrm{X} \in [0, 1] \qquad f_c(2\mathrm{X} - 1) = \frac{\lambda}{1 + \mathrm{X}}$$

(La fonction f_c est définie dans II. 4° *a.*).

b. Montrer qu'il existe une suite de polynômes q_n de degré n, à coefficients réels, tels que la suite :

$$\alpha_n = \operatorname*{Sup}_{\mathrm{X} \in [0,1]} \left|\frac{1}{1 + \mathrm{X}} - q_n(\mathrm{X})\right| \quad \text{vérifie pour tout} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^k \alpha_n = 0.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail